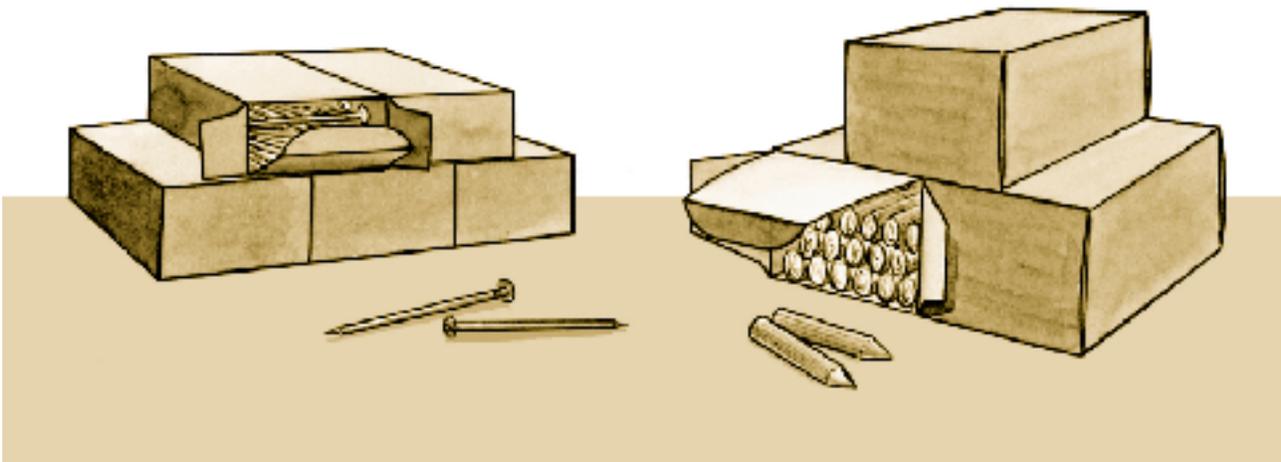




Lección 14: Problemas que se resuelven por sistemas de ecuaciones lineales

A continuación veremos algunos problemas que se resuelven con sistemas de ecuaciones y algunos ejemplos de cómo plantear los sistemas para poder resolver fácilmente los problemas.

Juan pagó \$50 por 3 cajas de taquetes y 5 cajas de clavos.
Pedro compró 5 cajas de taquetes y 7 de clavos y tuvo que pagar \$74. ¿Cuál es el precio de cada caja de taquetes y de cada caja de clavos?



Para plantear la solución de este problema, identificamos en primer lugar aquello sobre lo que se nos pregunta, es decir: ¿qué debemos averiguar? En este caso debemos encontrar dos cantidades, el precio de una caja de taquetes y el precio de una caja de clavos.

En segundo lugar debemos identificar las relaciones (o condiciones) que sobre esas dos cantidades se plantean en el problema. Si llamamos x al precio de una caja de taquetes y llamamos y al precio de una caja de clavos, podemos expresar lo que gastó Juan a través de una ecuación y lo que gastó Pedro por medio de otra. Para ello analicemos la información que nos presenta el problema y veamos cómo expresar algebraicamente las relaciones.

Información	Expresión algebraica
Precio de una caja de taquetes.	x pesos
Precio de 3 cajas de taquetes.	$3x$ pesos
Precio de 5 cajas de taquetes.	$5x$ pesos
Precio de una caja de clavos.	y pesos
Precio de 5 cajas de clavos.	$3y$ pesos
Precio de 7 cajas de clavos.	$5y$ pesos
Importe de la compra de Juan.	$3x + 5y = 50$
Importe de la compra de Pedro.	$5x + 7y = 74$

Ahora ya podemos plantear y resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 50 \\ 5x + 7y = 74 \end{cases}$$

Como los coeficientes son todos positivos, sabemos que debemos restar para eliminar una de las incógnitas y como todos son números distintos debemos efectuar primero las multiplicaciones convenientes. Por ejemplo si queremos eliminar la x , multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por 5 y los dos miembros de la segunda por 3 (si se quiere eliminar la y , se debe multiplicar la primera ecuación por 7 y la segunda por 5).

$$\begin{array}{r}
 15x + 25y = 250 \\
 - 15x + 21y = 222 \\
 \hline
 0 + 4y = 28
 \end{array}$$

Entonces $y = \frac{28}{4} = 7$, ahora sustituimos y por ese valor en la primera ecuación y obtenemos el valor de x (también podríamos haber sustituido en la segunda ecuación):

$$\begin{array}{r}
 3x + 5y = 50 \\
 3x + 5(7) = 50 \\
 3x = 50 - 35 \\
 x = \frac{15}{3} = 5
 \end{array}$$

Podemos entonces decir que la caja de taquetes cuesta \$5 y la de clavos cuesta \$7.

Enriqueta es costurera y quiere aprovechar una oferta de botones. El paquete de botones blancos cuesta \$15 y el de botones negros \$10. Si con \$180.00 compró en total 14 paquetes, ¿cuánto gastó en botones blancos?

Veremos dos maneras de plantear un sistema de ecuaciones para este problema. Según la primera manera, podemos pensar que para responder a la pregunta planteada nos puede ser útil conocer cuántos paquetes de botones blancos compró Enriqueta. Llamemos entonces x a la cantidad de paquetes de botones blancos y, equivalentemente, llamemos y a la cantidad de paquetes de botones negros. Podemos entonces expresar algebraicamente la cantidad total de paquetes comprados, el costo de los paquetes de cada color y el total gastado, lo que nos permitirá encontrar el dato que necesitamos para resolver el problema.



Información	Expresión algebraica
Cantidad de paquetes de botones blancos. Cantidad pagada por los botones blancos.	x $15x$
Cantidad de paquetes de botones negros. Cantidad pagada por los botones negros.	y $10y$
Total de paquetes comprados. Importe de la compra.	$x + y = 14$ $15x + 10y = 180$

Ahora ya podemos plantear el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 15x + 10y = 180 \end{cases}$$

Como a nosotros nos interesa conocer x , igualaremos los coeficientes de y . Es decir, para eliminar la y , multiplicamos la primera ecuación por 10.

$$\begin{array}{r} 10x + 10y = 140 \\ - 15x + 10y = 180 \\ \hline -5x + 0 = -40 \end{array}$$

Entonces despejamos la x :

$$\begin{aligned} -5x &= -40 \\ x &= -40 \div (-5) \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Ahora ya sabemos que Enriqueta compró 8 paquetes de botones blancos. Pero lo que queríamos averiguar es cuánto gastó en ellos. Como conocemos el costo de cada uno de esos paquetes, tenemos:

$$8 \times 15 = 120$$

Hemos llegado a la solución: podemos afirmar que Enriqueta gastó \$120 en botones blancos. Observe que según esta manera de resolver el problema, la solución no está dada directamente por el valor de x , sino que necesitábamos ese valor para poder realizar la última operación que nos dio el resultado.

Planteemos ahora la segunda manera de resolver el problema. Aquí nos podemos plantear que, como lo que necesitamos es saber cuánto gastó Enriqueta en botones blancos, esa cantidad es la que podemos llamar x , y , equivalentemente, llamamos y a la cantidad que gastó en botones negros. Ahora la información que tenemos se puede traducir en la siguiente tabla:

Información	Expresión algebraica
Cantidad pagada por los botones blancos. Cantidad de paquetes de botones blancos.	x $\frac{x}{15}$
Cantidad pagada por los botones negros. Cantidad de paquetes de botones negros.	y $\frac{y}{10}$
Importe de la compra. Total de paquetes comprados.	$x + y = 180$ $\frac{x}{15} + \frac{y}{10} = 14$

Esto nos da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 180 \\ \frac{x}{15} + \frac{y}{10} = 14 \end{cases}$$

Para eliminar la y ahora multiplicamos por 10 la segunda ecuación:

$$\begin{array}{r} x + y = 180 \\ - \frac{10x}{15} + y = 140 \\ \hline x - \frac{10x}{15} + 0 = 40 \end{array}$$

Y entonces despejamos la x :

$$x - \frac{10x}{15} = 40$$

$$\frac{15x - 10x}{15} = 40$$

$$\frac{5x}{15} = 40$$

$$\frac{x}{3} = 40$$

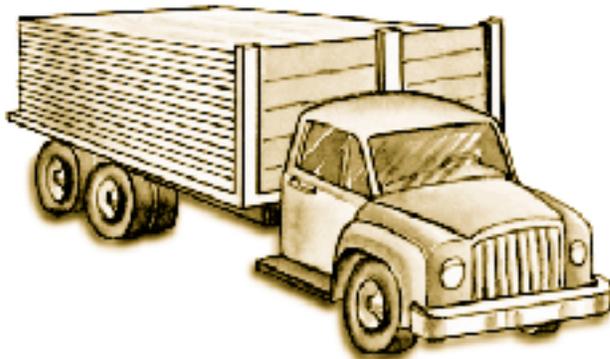
$$x = 40 \times 3 = 120$$

Ahora hemos llegado directamente a la solución: como en esta segunda manera la x representaba lo que Enriqueta gastó en botones blancos, tenemos que gastó \$120.

Observe que las dos maneras dieron lugar a distintos sistemas de ecuaciones, pero que con ambas llegamos al mismo resultado. Y observe también que en ninguna de las dos tuvimos necesidad de encontrar el valor de y , que representaba en el primer caso la cantidad de paquetes de botones negros y en el segundo el dinero pagado por ellos; si lo hubiéramos deseado, también lo hubiéramos podido calcular.

Veamos ahora un par de ejemplos más de cómo plantear un sistema de ecuaciones:

Con dos camiones cuyas capacidades de carga son respectivamente de 3 y 4 toneladas, se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizó cada camión?



Si llamamos x a la cantidad de viajes que realizó el primer camión y y a la cantidad de viajes que realizó el segundo camión, podemos expresar algebraicamente la información que nos presenta el problema:

Información	Expresión algebraica
Cantidad de viajes del primer camión. Madera transportada por el primer camión.	x $3x$
Cantidad de viajes del segundo camión. Madera transportada por el segundo camión.	y $4y$
Total de madera transportada. Total de viajes.	$3x + 4y = 80$ $x + y = 23$

El sistema de ecuaciones es entonces:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 80 \\ x + y = 23 \end{cases}$$

Usted puede resolver el sistema y encontrar los valores de x y de y , para concluir que el primer camión realizó 12 viajes y el segundo 11.

La edad de Camila y de su mamá suman 54 años y dentro de 9 años la edad de la mamá será el doble de la edad de Camila. ¿Cuántos años tiene cada una?

Si llamamos x a la edad de Camila y llamamos y a la edad de la mamá, podemos expresar algebraicamente las relaciones entre las edades de ambas que nos presenta el problema.

Información	Expresión algebraica
Edad actual de Camila. Edad de Camila dentro de nueve años.	x $x + 9$
Edad actual de la mamá. Edad de la mamá de Camila dentro de nueve años.	y $y + 9$
Suma de las edades actuales. Relación entre las edades dentro de nueve años.	$x + y = 54$ $y = 2x$



Ahora ya podemos plantear el sistema de ecuaciones que usted puede resolver:

$$\begin{cases} x + y = 54 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

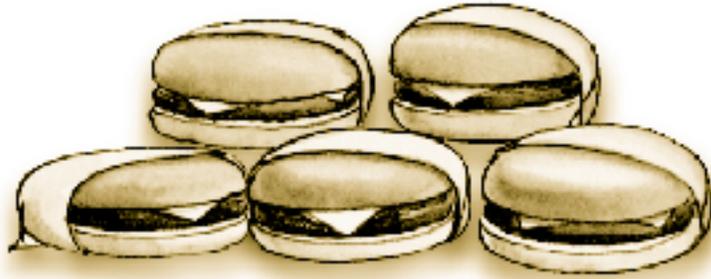
Seguramente llegó a la conclusión de que Camila tiene 15 años y su mamá 39.

Ejercicio 1

Plantee el sistema que permite resolver cada uno de los siguientes problemas y resuélvalo.

- Jovita y Felipe hacen paletas de chocolate para vender. La materia prima necesaria para hacer una paleta grande les cuesta \$5.00 y para una paleta chica \$3.00. Si disponen de \$570.00 y quieren hacer 150 paletas, ¿cuántas paletas de cada tamaño podrán hacer?
- El costo de las entradas a una función de títeres es de \$30 para los adultos y \$20 para los niños. Si el sábado pasado asistieron 248 personas y se recaudaron \$5930, ¿cuántos adultos y cuántos niños asistieron a la función el sábado?
- Marta y sus amigos pagaron \$109 por 5 hamburguesas y 7 refrescos. Si la semana anterior consumieron 8 hamburguesas y 11 refrescos y la cuenta fue de \$173, ¿cuánto cuesta cada hamburguesa y cada refresco?





- d) El perímetro de un rectángulo es de 40 metros. Si se duplica el largo del rectángulo y se aumenta en 6 metros el ancho, el perímetro queda en 76 metros. ¿Cuáles son las medidas originales del rectángulo y cuáles las medidas del rectángulo agrandado?
- e) Don José y don Tiburcio fueron a comprar semillas para sembrar. Don José compró cuatro sacos de maíz y tres sacos de frijol, y don Tiburcio compró tres sacos de maíz y dos de frijol. La carga de don José fue de 480 kilogramos y la de don Tiburcio de 340. ¿Cuánto pesaban cada saco de maíz y cada saco de frijol?
- f) Encuentre dos números tales que su suma sea 40 y su diferencia sea 14.
- g) En una fábrica tienen máquinas de tipo A y máquinas de tipo B. La semana pasada se dio mantenimiento a 5 máquinas de tipo A y a 4 del tipo B por un costo de \$3405. La semana anterior se pagó \$3135 por dar mantenimiento a 3 máquinas de tipo A y 5 de tipo B. ¿Cuál es el costo de mantenimiento de las máquinas de cada tipo?
- h) Las edades de Pedro y de su papá suman 44 años. Hace 4 años la edad de Pedro era la octava parte de la de su papá. ¿Cuántos años tiene cada uno?